INVERZNÍ FUNKCE

Př: Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f a definiční obory funkcí f a f^{-1}.

- Při hledání inverzní fce f^{-1} k fci f využijeme vlastnost:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Tedy, složíme-li dvě k sobě inverzní fce, pak se tyto fce navzájem „vyruší" a zbyde jen vnitřní složka.

- Při hledání $D(f^{-1})$ využijeme vlastnost: (Př. 3,)

$$D(f^{-1}) = H(f)$$

1, $f:\ \underbrace{y = 4x^2 - 4x + 2}$, $x \in \langle \frac{1}{2}, \infty)$ $\Rightarrow$ $D(f) = \langle \frac{1}{2}, \infty)$

↳ z předpisu fce f postupně vyjádříme proměnnou x:

$y = (2x-1)^2 - 1 + 2$ → 1, Metoda doplnění na čtverec

$(2x-1)^2 = y - 1$ → 2, odmocníme obě strany rce – druhá odmocnina je inverzní fce k druhé mocnině

$2x - 1 = \sqrt{y-1}$

$2x = 1 + \sqrt{y-1}$ → 3, osamostatníme proměnnou x

$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{y-1})$ 4, zaměníme proměnné x a y a dostáváme hledanou inverzní fci f^{-1}

$f^{-1}:\ y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x-1})$

$D(f^{-1})$: $x - 1 \geq 0$ ... pod odmocninou nesmí být záporné číslo

$x \geq 1$ $\Rightarrow$ $D(f^{-1}) = \langle 1, \infty)$

2, $f:\ y = 4 + 5^{2x-3}$ ... z předpisu fce f postupně vyjádříme proměnnou x:

$5^{2x-3} = y - 4$ → 1, osamostatníme exponenciální fci

$\underbrace{\log_5 5^{2x-3}}_{=2x-3} = \log_5(y-4)$ → 2, na obě strany rce aplikujeme inverzní fci k exponenciální fci o základu 5, což je logaritmická fce o základu 5

$2x - 3 = \log_5(y-4)$

$2x = 3 + \log_5(y-4)$ → 3, osamostatníme proměnnou x

$x = \frac{1}{2}(3 + \log_5(y-4))$ 4, zaměníme proměnné x a y

$f^{-1}:\ y = \frac{1}{2}[3 + \log_5(x-4)]$

$D(f) = \mathbb{R}$ ... do exponenciální fce můžeme dosadit libovolné reálné číslo

$D(f^{-1})$: $x - 4 > 0$ ... do logaritmu můžeme dosadit pouze kladná reálná čísla

$x > 4$ $\Rightarrow$ $D(f^{-1}) = (4, \infty)$

3) $f: y = 4 - 5\sin(2x+3)$ ... vyjádříme x:

1. osamostatníme fci sinus
2. použijeme inverzní fci k fci sinus, což je fce arcsin
3. osamostatníme x
4. zaměníme proměnné x a y

$$\sin(2x+3) = \frac{1}{5}(y-4)$$

$$\underbrace{\arcsin[\sin(2x+3)]}_{=2x+3} = \arcsin\frac{y-4}{5}$$

$$2x+3 = \arcsin\frac{y-4}{5}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-3+\arcsin\frac{y-4}{5}\right)$$

$$f^{-1}: y = \frac{1}{2}\left(-3+\arcsin\frac{x-4}{5}\right)$$

$D(f)$: Aby k fci sinus existovala inverzní fce, musíme definiční obor fce $\sin x$ zúžit na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2x+3) \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4} \\ 2x+3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow D(f) = \left\langle -\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}, -\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right\rangle$$

$D(f^{-1})$: I. zp.: $D(f^{-1}) = H(f)$ ... protože fce f je prostá, získáme „krajní body" oboru hodnot $H(f)$ jako funkční hodnoty fce f v krajních bodech definičního oboru $D(f)$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 4-5\sin\left[2\left(-\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+3\right] = 4-5\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4-5\cdot(-1) = 9 \\ f\left(-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 4-5\sin\left[2\left(-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+3\right] = 4-5\sin\frac{\pi}{2} = 4-5\cdot 1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$D(f^{-1}) = \langle -1, 9\rangle$$

II. zp.: Definičním oborem fce $\arcsin x$ je interval $\langle -1, 1\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{5} \in \langle -1, 1\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-4}{5} = -1 \Rightarrow x = -1 \\ \frac{x-4}{5} = 1 \Rightarrow x = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow D(f^{-1}) = \langle -1, 9\rangle$$

Následující příklady vyřešte sami:

4) $f: y = 1 + 3\log_4(2x+5)$

5) $f: y = 5 + 4\,\mathrm{arctg}(3x+2)$

6) $f: y = \frac{2+3^x}{9-3^x}$

4) $f: y = 1 + 3\log_4(2x+5)$

$$\log_4(2x+5) = \frac{1}{3}(y-1)$$

$$\underbrace{4^{\log_4(2x+5)}} = 4^{\frac{1}{3}(y-1)}$$

$$2x+5 = 4^{\frac{1}{3}(y-1)}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(4^{\frac{1}{3}(y-1)} - 5\right)$$

$f^{-1}: y = \frac{1}{2}\left(4^{\frac{1}{3}(x-1)} - 5\right)$

$D(f): \; 2x+5 > 0$

$x > -\frac{5}{2}$

$D(f) = (-\frac{5}{2}, \infty)$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

5) $f: y = 5 + 4\,\mathrm{arctg}(3x+2)$

$$\mathrm{arctg}(3x+2) = \frac{1}{4}(y-5)$$

$$\underbrace{\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(3x+2)]} = \mathrm{tg}\frac{y-5}{4}$$

$$3x+2 = \mathrm{tg}\frac{y-5}{4}$$

$$x = \frac{1}{3}\left(-2 + \mathrm{tg}\frac{y-5}{4}\right)$$

$f^{-1}: y = \frac{1}{3}\left(-2 + \mathrm{tg}\frac{x-5}{4}\right)$

$D(f) = \mathbb{R}$

$D(f^{-1}): \; \frac{x-5}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\frac{x-5}{4} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 5 - 2\pi$

$\frac{x-5}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 5 + 2\pi$

$D(f^{-1}) = (5-2\pi, 5+2\pi)$

6) $f: y = \frac{2+3^x}{9-3^x}$

$$9y - y\cdot 3^x = 2 + 3^x$$

$$-y3^x - 3^x = 2 - 9y$$

$$3^x(y+1) = 9y - 2$$

$$3^x = \frac{9y-2}{y+1}$$

$$\log_3 3^x = \log_3\frac{9y-2}{y+1}$$

$$x = \log_3\frac{9y-2}{y+1}$$

$f^{-1}: y = \log_3\frac{9x-2}{x+1}$

$D(f): \; 9 - 3^x \neq 0$

$3^x \neq 9 = 3^2$

$x \neq 2$

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$D(f^{-1}): \; \frac{9x-2}{x+1} > 0$

$(9x-2>0 \wedge x+1>0) \vee (9x-2<0 \wedge x+1<0)$

$\underbrace{x > \frac{2}{9} \qquad x > -1}_{x \in (\frac{2}{9}, \infty)} \qquad \underbrace{x < \frac{2}{9} \qquad x < -1}_{x \in (-\infty, -1)}$

$D(f^{-1}) = (-\infty, -1) \cup (\frac{2}{9}, \infty)$